



TITLE:

On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order  $n$  equiv  $2 \pmod{4}$  (Research on algebraic combinatorics and representation theory of finite groups and vertex operator algebras)

AUTHOR(S):

須田, 庄

---

CITATION:

須田, 庄. On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order  $n$  equiv  $2 \pmod{4}$  (Research on algebraic combinatorics and representation theory of finite groups and vertex operator algebras). 数理解析研究所講究録 2018, 2086: 105-110

ISSUE DATE:

2018-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/251564>

RIGHT:

# On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order $n \equiv 2 \pmod{4}$

愛知教育大 須田庄 (Sho Suda)  
Aichi University of Education

## 1 はじめに

位数が  $n$  の正方行列で成分を  $1, -1$  とする行列のうち、最大の行列式を持つ行列を D-optimal design と呼ぶ。本講究録では  $n \equiv 2 \pmod{4}$  のとき、歪対称となる D-optimal design の Smith normal form を決定する。本研究は Gary Greaves 氏 (Nanyang Technological University) との共同研究である。省略された証明については [7] を参照されたい。

$M$  を階数が  $r$  の  $n \times n$  の整数行列とする。このとき、ある  $n \times n$  ユニモジュラー行列  $P, Q$  が存在し、

$$PMQ = \text{diag}[m_1, m_2, \dots, m_r, m_{r+1}, \dots, m_n]$$

となる。ただし、対角成分  $m_1, \dots, m_n$  は非負整数であり、 $m_i | m_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) かつ  $m_{r+1} = 0$  を満たす。このような対角行列は一意的に定まる。この対角行列を  $M$  の Smith normal form といい、その対角成分を  $M$  の invariant factors という。invariant factors に関する次の補題は基本的である。

**Lemma 1.1** (Corollary 1.20 of [13]).  $M$  を階数が  $r$  の  $n \times n$  の整数行列とし、 $M$  の invariant factors を  $m_1, \dots, m_n$  としたとき、 $m_i = d_i(M)/d_{i-1}(M)$  ( $i = 1, \dots, r$ ) が成り立つ。ここで、 $d_i(M)$  は  $M$  のすべての  $i \times i$  小行列式の最大公約数を表し、 $d_0(M) = 1$  とする。

## 2 D-optimal designs

位数が  $n$  の正方行列で成分を  $1, -1$  とする  $M$  の行列式に対して次の不等式が知られている [9] :

$$|\det(M)| \leq n^{n/2}. \quad (2.1)$$

(2.1)において等号成立することと、 $MM^T = nI$  が成り立つことが同値である。このような行列  $M$  をアダマール行列という。アダマール行列が存在するとき、位数は 1, 2 もしくは 4 の倍数でなければならないことは容易にわかる。

4 の倍数でない位数  $n$  に対して、不等式 (2.1) は [5, 15] において改善されている。本講究録では  $n \equiv 2 \pmod{4}$  の場合に焦点を当てる。 $n \equiv 2 \pmod{4}$  となる  $n$  に対して、

$$|\det(X)| \leq 2(n-1)(n-2)^{(n-2)/2} \quad (2.2)$$

が成り立つ。(2.2)において等号成立することと、次の行列等式を満たす位数  $n$  の正方行列  $B$  が存在することが同値である:

$$BB^T = B^T B = \begin{pmatrix} (n-2)I + 2J & O_{n/2} \\ O_{n/2} & (n-2)I + 2J \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

(2.3) を満たす位数  $n$  の正方行列  $B$  を EW 行列と呼ぶ。ただし、 $J$  は成分がすべて 1 の正方行列を表す。

用語の乱用であるが、成分が 1, -1 である位数が  $n$  の正方行列  $M$  が歪対称 (skew-symmetric) であるとは、 $M + M^T = 2I$  が成り立つことと定義する。この条件は、 $M - I$  が通常の意味で歪対称であることと同値である。

一般にアダマール行列の Smith normal form は位数により一意的に決まらないが、歪対称の条件を課すと一意的に決まることが知られている。

**Theorem 2.1** ([12, 8]). 位数が  $4t$  の歪対称アダマール行列の *Smith normal form* は次の通り一意的に決まる:

$$\text{diag}[1, \underbrace{2, \dots, 2}_{2t-1}, \underbrace{2t, \dots, 2t}_{2t-1}, 4t].$$

一般に EW 行列の Smith normal form も位数から一意的に決まらない [11]。歪対称 EW 行列の Smith normal form は Armario により、部分的に決定されていた [4]。さらに歪対称 EW 行列の Smith normal form は位数により明示的に決まるであろうという予想がされていた。本講究録では、Armario の予想を肯定的に解決したことを報告する。主結果は以下の通りである。

**Theorem 2.2.** 位数が  $4t + 2$  の歪対称 EW 行列の *Smith normal form* は次の通り一意的に決まる:

$$\text{diag}[1, \underbrace{2, \dots, 2}_{2t+1}, \underbrace{2t, \dots, 2t}_{2t-1}, 2t(4t+1)].$$

### 3 Theorem 2.2 の証明の方針

位数が  $4t+2$  の  $\{1, -1\}$ -行列  $S$  を歪対称 EW 行列とし、その invariant factors を  $s_1, s_2, \dots, s_{4t+2}$  とする。 $S$  は  $\{1, -1\}$ -行列であるので、Lemma 1.1 により  $s_1 = 1$  が従う。 $s_{2t+2}, s_{4t+2}$  が決定できれば残りの invariant factors は決定されるという次の補題は、初等整数論的な議論で証明される。

**Lemma 3.1.** 位数が  $4t+2$  の  $\{1, -1\}$ -行列  $S$  を歪対称 EW 行列とし、その invariant factors を  $s_1, s_2, \dots, s_{4t+2}$  とする。 $s_{2t+2} = 2, s_{4t+2} = 2t(4t+1)$  が成り立つと仮定する。このとき、 $s_2 = \dots = s_{2t-1} = 2, s_{2t+3} = \dots = s_{4t+1} = 2t$  が成り立つ。

以下では、 $s_{2t+2} = 2$  と  $s_{4t+1} = 2t$  を示す方針について述べる。

#### 3.1 $s_{2t+2} = 2$

$S$  を位数が  $4t+2$  の歪対称 EW 行列とする。このとき、EW トーナメント行列と呼ばれるある有向グラフの隣接行列  $A$  が以下の通り対応する [2, 6]:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{1}^\top \\ -1 & I + A - A^\top \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

このとき、 $A + I$  と  $S$  の invariant factors には以下の関係がある。

**Lemma 3.2.** [4, Lemma 2.2, Corollary 2.3]  $S$  を位数が  $4t+2$  の歪対称 EW 行列、 $A$  を (3.1) により  $S$  から得られる EW トーナメント行列とする。 $s_1, \dots, s_{4t+2}$  を  $S$  の invariant factors、 $b_1, \dots, b_{4t+1}$  を  $A + I$  の invariant factors とする。このとき、次が成り立つ。

$$(1) \ s_{i+1} = 2b_i, \ i = 1, \dots, 4t+1.$$

$$(2) \ \det(A + I) = t^{2t}(4t+1).$$

Lemma 3.2 により、 $b_{2t+1} = 1$  を示せばよい。

以下の等式が示す通り、invariant factors と整数行列の  $p$ -rank は密接に関係している。

$$\text{rank}_p(A + I) = \max\{i \mid p \text{ does not divide } b_i\}$$

$A + I$  の  $p$ -rank については、 $p$  が  $t$  を割り切るときに明示的に計算できる。証明には、EW トーナメント行列が満たす行列等式を用いる [2]。

**Lemma 3.3.**  $A$  を位数が  $4t+1$  の EW トーナメント行列とし、 $p$  を  $t$  を割り切る素数とする。このとき、 $\text{rank}_p(A + I) = 2t+1$  が成り立つ。

( $b_{2t+1} = 1$  の証明).  $b_{2t+1}$  を割り切る素数  $p$  が存在したと仮定する. Lemma 1.1, Lemma 3.2 により  $b_1 \cdots b_{4t+1} = \det(A + I) = t^{2t}(4t + 1)$  がわかる. このとき、以下のいずれかが成り立つ。

(1)  $p$  は  $t$  を割り切る。

(2)  $p$  は  $t$  を割り切らず、かつ  $p$  は  $4t + 1$  を割り切る。

(1) のとき、 $p | b_{2t+1}$  より

$$\text{rank}_p(A + I) = \max\{i \mid p \text{ does not divide } b_i\} \leq 2t.$$

となるが、これは Lemma 3.3 に反する。

(2) のとき、 $i = 2t + 2, \dots, 4t + 1$  に対して  $p$  は  $b_i$  を割り切るので、 $p^{2t+1}$  は  $b_1 \cdots b_{4t+1} = t^{2t}(4t + 1)$  を割り切る。ここで、 $p$  は  $t$  を割り切らないので、 $p^{2t+1}$  は  $4t + 1$  を割り切る。一方、 $p$  は奇数でなければならないので、 $p \geq 3$  である。このとき  $p^{2t+1} > 4t + 1$  となるが、これは先ほどの  $p^{2t+1}$  は  $4t + 1$  を割り切ることに反する。

(1), (2) のいずれの場合も矛盾が導かれたので、 $b_{2t+1}$  を割り切る素数が存在しないこと、すなわち  $b_{2t+1} = 1$  が示された。□

### 3.2 $s_{4t+2} = 2t(4t + 1)$

Lemma 1.1 により、 $d_{4t-1}(S)$  を決定すれば  $s_{4t+2}$  も決定できる。ここでは次の補題を用いる。位数  $n$  の正方行列  $M$  と行列の添え字の集合  $I, J$  に対して、行と列をそれぞれ  $I, J$  に制限した  $M$  の部分行列を  $M_{I,J}$  と記す。また、 $I = \{i\}, J = \{j\}$  のときは  $M_{I,J} = M_{i,j}$  とし、 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  とする。

**Lemma 3.4** (Page 21 of [10]).  $M$  を正則な  $n \times n$  行列とする。このとき次が成り立つ。

$$\det(M_{[n] \setminus \{i\}, [n] \setminus \{j\}}) = \pm \det(M) \det((M^{-1})_{j,i}).$$

この補題により  $S$  の逆行列の成分が明示的にわかれば、 $S$  の  $(4t + 1) \times (4t + 1)$  小行列式が計算できる。

式 (2.3) より

$$S^{-1} = S^T \left( \frac{1}{4t} I - \frac{1}{4t(4t + 1)} \begin{pmatrix} J & O \\ O & J \end{pmatrix} \right). \quad (3.2)$$

となる。ここで、次の補題を用いる。

**Lemma 3.5** ([14]).  $S$  を  $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$  のようにブロック分けする。ただし、各  $S_{ij}$  は  $(2t + 1) \times (2t + 1)$  行列である。このとき  $S_{11}J = S_{22}J = J$ ,  $S_{12}J = -S_{21}J = \pm\sqrt{8t + 1}J$  が成り立つ。



Lemma 3.5 と  $\det(S) = (8t+2)(4t)^{2t}$  とより

$$\det(S)S^{-1} = 2(4t)^{2t-1} \left( (4t+1)(2I-S) - \begin{pmatrix} J & \mp\sqrt{8t+1}J \\ \pm\sqrt{8t+1}J & J \end{pmatrix} \right).$$

したがって  $\det(S)S^{-1}$  の成分は、符号を除いて

$$2(4t)^{2t-1} \times 4t, \quad 2(4t)^{2t-1} \times (4t+2), \quad 2(4t)^{2t-1} \times (4t+1 \pm \sqrt{8t+1}) \quad (3.3)$$

となる。ここで  $\sqrt{8t+1}$  は奇数であることが [3] で示されているので、(3.3) の値の最大公約数は  $4(4t)^{2t-1}$  となることが示された。したがって  $d_{4t+1}(S) = 4(4t)^{2t-1}$  となる。 $d_{4t+2}(S) = \det(S) = (8t+2)(4t)^{2t}$  を用いると、Lemma 1.1 より  $s_{4t+2} = d_{4t+2}(S)/d_{4t+1}(S) = 2t(4t+1)$  を得る。

## 4 おわりに

歪対称 EW 行列の Smith normal form を決定するために、付随する EW トーナメント行列を  $A$  としたとき、 $A+I$  の Smith normal form を部分的に決定することが重要であった。 $S$  の Smith normal form を決定するためには必要はないが、Greaves 氏との共同研究をさらに進めて以下の結果を得た。

**Theorem 4.1.** 位数が  $4t+1$  の EW トーナメント行列の *Smith normal form* は次の通り一意的に決まる:

$$\text{diag}[\underbrace{1, \dots, 1}_{2t+2}, \underbrace{t, \dots, t}_{2t-2}, t^2(4t+1)].$$

歪対称な EW 行列の例は、位数が 6, 14, 26, 42, 62 のときに知られている [1]。いずれも supplementary difference set から構成されている。最後に以下の問題を提示し本講究録を終える。

**Problem 4.2.** 歪対称 EW 行列の無限系列の例を構成せよ。

## 参考文献

- [1] M Araya, M. Harada and S. Suda, Supplementary difference sets related to a certain class of complex spherical 2-codes, *Australas. J. Combin.*, **65** (2016), 71–83.
- [2] J. A. Armario, On  $(-1, 1)$ -matrices of skew type with the maximal determinant and tournaments, *Algebraic design theory and Hadamard matrices*, 1–11, **Springer Proc. Math. Stat.**, 133, Springer, Cham, 2015.

- [3] J. A. Armario and M. D. Frau, On skew E-W matrices, *J. Combin. Des.* **24** (2016), 461–472.
- [4] J. A. Armario, On the Smith normal form of skew E-W matrices, *Linear Multilinear Algebra* **65** (2017), no. 2, 375–380.
- [5] H. Ehlich, Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen, *Math. Z.* **83** (1964) 123–132.
- [6] G. Greaves and S. Suda, Symmetric and skew-symmetric  $\{0, \pm 1\}$ -matrices with large determinants, *J. Combin. Des.* **25** (2017), 507–522.
- [7] G. Greaves and S. Suda, On the Smith normal form of a skew-symmetric D-optimal design of order  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , submitted, arXiv:1801.07516.
- [8] I. Hacıoğlu and A. Keman, A shorter proof of the Smith normal form of skew-Hadamard matrices and their designs, *Hacet. J. Math. Stat.* **43** (2014), 227–230.
- [9] J. Hadamard, Resolution d’une question relative aux determinants, *Bull. Sciences Mathematiques* **17** (1893) 240–246.
- [10] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [11] C. Koukouvinos, M. Mitrouli and J. Seberry, On the Smith normal form of D-optimal designs, *Linear Algebra Appl.* **247** (1996), 277–295.
- [12] T. S. Michael and W. D. Wallis, Skew-Hadamard matrices and the Smith normal form, *Des. Codes Cryptogr.* **13** (1998), 173–176.
- [13] C. Norman, *Finitely Generated Abelian Groups and Similarity of Matrices over a Field*, Springer-Verlag, London, 2012.
- [14] H. Nozaki and S. Suda, Complex spherical codes with two inner products, *European J. Combin.* **51** (2016), 511–518.
- [15] M. Wojtas, On Hadamard’s inequality for the determinants of order non-divisible by 4, *Colloq. Math.* **12** (1964) 73–83.